

1. kolokwium z Analizy Matematycznej II.2 2023/24

13 maja 2024

Za rozwiązanie każdego z zadań można otrzymać podaną liczbę punktów. W zadaniu 1 należy sformułować precyzyjne matematycznie stwierdzenia. Rozwiązania zadań 2-5 należy szczegółowo uzasadnić, powołując się na fakty znane z wykładu bądź z ćwiczeń.

Zadanie 1. [8pt]

1. Wyjaśnij, co to znaczy, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}_n$ jest zbieżny w normie L^1 . [2pt]
2. Podaj definicję splotu funkcji i sformułuj warunki, które zapewniają, że taka operacja daje dobrze określoną funkcję w przestrzeni L^1 . [2pt]
3. Sformułuj Twierdzenie o zamianie zmiennych pod całką względem miary Lebesgue'a λ_n . [2pt]
4. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie rozmaitością zanurzoną wymiaru m klasy C^1 , $U \subset \mathbb{R}^n$ oraz $V \subset \mathbb{R}^m$ będą zbiorami otwartymi, a $\psi: V \rightarrow M \cap U \subset \mathbb{R}^n$ parametryzacją płata $M \cap U$. Niech $A \subset V$ będzie zbiorem mierzalnym. Podaj definicję miary powierzchniowej zbioru $\psi(A)$. [2pt]

Zadanie 2. [8pt] Załóżmy, że $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna z p -tą potęgą dla pewnego $p > 1$, tzn.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\lambda_3 < \infty.$$

Określamy ciąg $a_k = \lambda_n(\{x : |f(x)| > k\})$. Wykaż, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny.

Zadanie 3. [8pt] Dany jest ciąg zbiorów mierzalnych $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ spełniający warunek

$$\lambda_n(A_k \div A_{k+1}) \leq 2^{-k} \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots,$$

przy czym symbol $\div$ oznacza różnicę symetryczną dwóch zbiorów.

Wykaż, że istnieje zbiór mierzalny $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dla którego $\lambda_n(A_k \div A)$ zbiega do zera przy $k \rightarrow \infty$.

Zadanie 4. [8pt] Każdy punkt elipsy $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x + z = 1\}$ został połączony odcinkiem z punktem $(0, 0, 0)$. Zbiór M jest sumą tych odcinków (bez końców).

a) Wykaż, że M jest rozmaitością.

b) Oblicz

$$\int_M \sqrt{x + 3z} d\sigma_2.$$

Zadanie 5. [8pt] Niech $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 < 4z\}$. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_A \frac{y^2 z}{\ln(x^2 + 2y^2 + n) - \ln n} d\lambda_3.$$